

# Approche logarithmique des noyaux étales sauvages des corps de nombres\*

Jean-François JAULENT & Alexis MICHEL

**Abstract.** We study the  $\ell$ -part of the the wild *étale* kernels  $WK_{2i}(F)$  of an arbitrary number field  $F$  for a given prime  $\ell$  in connection with the logarithmic  $\ell$ -class groups  $\tilde{C}_{\ell_F}$ . From the logarithmic arithmetic we deduce rank formulas, periodicity and reflection theorems, triviality characterizations and various consequences.

**Résumé.** Nous étudions la  $\ell$ -partie des noyaux étales sauvage  $WK_{2i}(F)$  d'un corps de nombres arbitraire  $F$  en liaison avec l'arithmétique des classes logarithmiques. Nous en déduisons notamment des formules de rang, des résultats de périodicité et de réflexion, des caractérisations de la trivialité, ainsi que diverses conséquences.

## Introduction.

Introduits par P. Schneider [Sc] comme noyaux de localisation pour certains groupes de cohomologie  $\ell$ -adique attachés à un corps de nombres  $F$ , les  $\ell$ -noyaux étales sauvages  $WK_{2i}(F)$  ont été interprétés en termes de  $K$ -théorie supérieure suite en particulier aux travaux de C. Soulé [So], W. Dwyer & E. Friedlander [DF], G. Banaszak [Ba<sub>1</sub>, Ba<sub>2</sub>, Ba<sub>3</sub>], et ainsi nommés par T. Nguyen Quang Do [Ng<sub>1</sub>] car ils coïncident pour  $2i = 2$  avec les noyaux sauvages usuels de la  $K$ -théorie, en vertu de la conjecture de Quillen-Lichtenbaum établie dans ce cas par Tate.

Nous sommes plus particulièrement intéressés ici par certaines de leurs propriétés arithmétiques déjà étudiés par plusieurs auteurs ; notamment par M. Kolster [Ko<sub>3</sub>], en liaison avec la conjecture de Leopoldt ; par J.-F. Jaulent et F. Soriano [JS<sub>2</sub>] pour  $2i = 2$ , sous celle de Gross (cf. [FG, Ja<sub>6</sub>]), en lien avec le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques.

L'objet du présent travail est ainsi de généraliser les résultats de [JS<sub>2</sub>] à *n'importe quel* corps de nombres, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$  et *indépendamment de toute conjecture*.

Le principe de notre méthode est simple : Partant de la description tordue à la Tate de ces divers groupes en haut de la tour cyclotomique, nous en déduisons par codescente, sous l'hypothèse essentielle de procyclicité<sup>1</sup> de la tour cyclotomique  $F[\zeta_{\ell^\infty}]/F$ , des relations précises entre les  $\ell$ -noyaux  $WK_{2i}(F)$  et le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps  $F[\zeta_{2\ell}]$ , lesquelles permettent en retour de transporter aux noyaux étales sauvages les informations sur ce groupe données par la Théorie logarithmique des genres et, plus généralement, l'arithmétique des classes et des unités logarithmiques développée *pour elle-même* dans [Ja<sub>6</sub>].

Outre les perspectives algorithmiques qu'ouvre notre approche (cf. [DS, Dy]), il nous paraît important de souligner trois points : D'abord la simplicité des résultats obtenus<sup>2</sup>. Ensuite les implications heuristiques de cette description, dont la discussion finale en appendice est une assez belle illustration. Enfin l'importance de l'hypothèse de procyclicité pour  $\ell = 2$ , en l'absence de laquelle le *bon* approximant

\*J. Number Th. **120** (2006), 72–91.

<sup>1</sup>Hypothèse qui est naturellement vérifiée pour tous les premiers  $\ell$  impairs, mais non pour  $\ell = 2$ .

<sup>2</sup>Le Corollaire 5 en est un exemple parfait.

des 2-noyaux étales n'est plus le 2-groupe des classes logarithmiques qui apparaît dans [Ja<sub>5</sub>], mais le 2-groupe des classes positives  $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$  introduit à cet effet dans [JS<sub>3</sub>], en cohérence avec les résultats de [Hu<sub>1</sub>]. Ce dernier point est à mettre en relation avec le fait que le 2-noyau sauvage  $WK_{2i}(F)$  ne coïncide pas dans ce cas avec le sous-groupe des éléments de hauteur infinie de la 2-partie du groupe  $K_{2i}(F)$  (cf. [Ta, Hu<sub>2</sub>, Hu<sub>3</sub>, HR, JS<sub>4</sub>]).

**Remerciements.** Le présent article est la rédaction d'une conférence donnée à Metz en juin 2002 lors d'un colloque sur la  $K$ -théorie des corps de nombres. Les auteurs remercient tout particulièrement le rapporteur pour les améliorations apportées à leur texte.

## 1. Classes logarithmiques et noyaux étales sauvages

Nous nous plaçons tout au long de cet article dans la situation générale suivante : le nombre premier  $\ell$  étant fixé, nous désignons par  $F$  un corps de nombres arbitraire, à cette seule réserve<sup>3</sup> que nous demandons que l'extension cyclotomique  $F[\zeta_{\ell^\infty}]/F$ , engendrée par les racines d'ordre  $\ell$ -primaire de l'unité, soit *procyclique*.

### 1.a. Le contexte galoisien semi-simple

Le corps  $F$  étant fixé, nous notons  $L$  une extension abélienne de  $F$ , de groupe de Galois  $\Delta = \text{Gal}(L/F)$ , de degré  $d$  étranger à  $\ell$ , et contenant une racine primitive  $\ell$ -ième de l'unité  $\zeta$ . Sous l'hypothèse  $\ell \nmid d$ , l'algèbre résiduelle  $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$  est ainsi une algèbre semi-simple, produit direct d'extensions  $F_\varphi$  de  $\mathbb{F}_\ell$  ; l'algèbre  $\ell$ -adique  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$  une algèbre semi-locale, produit direct d'extensions non ramifiées  $Z_\varphi$  de  $\mathbb{Z}_\ell$  ; et les idempotents primitifs  $\bar{e}_\varphi$  (respectivement  $e_\varphi$ ) correspondant à leurs décompositions respectives :

$$\mathbb{F}_\ell[\Delta] = \bigoplus_\varphi \mathbb{F}_\ell[\Delta]\bar{e}_\varphi = \bigoplus_\varphi F_\varphi \quad \& \quad \mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \bigoplus_\varphi \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi = \bigoplus_\varphi Z_\varphi$$

sont donnés à partir des caractères  $\ell$ -adiques irréductibles  $\varphi$  de  $\Delta$  par les formules classiques :

$$e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1})\tau, \text{ et leurs réductions respectives modulo } \ell.$$

Parmi les caractères de  $\Delta$  figurent en particulier le *caractère unité* 1, dont l'idempotent associé est donné à partir de la norme algébrique  $\nu_\Delta = \sum_{\tau \in \Delta} \tau$  par  $e_1 = \frac{1}{d} \nu_\Delta$ , et le *caractère cyclotomique*  $\omega$ , caractérisé<sup>4</sup> par l'identité :

$$\zeta^\tau = \zeta^{\omega(\tau)} \quad \forall \tau \in \Delta.$$

L'inverse<sup>5</sup>  $\bar{\omega} = \omega^{-1}$  de  $\omega$ , c'est à dire le caractère défini par  $\bar{\omega}(\tau) = \omega(\tau^{-1})$ , est dit souvent *anticyclotomique*, et l'involution

$$\psi \mapsto \psi^* = \omega\psi^{-1},$$

de l'algèbre  $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$  des caractères  $\ell$ -adiques virtuels de  $\Delta$  est connue traditionnellement sous le nom d'*involution du miroir* ; on dit encore que  $\psi^*$  est le *reflet* de  $\psi$ . Les anneaux locaux  $\mathbb{Z}_{\varphi^*}$ ,  $\mathbb{Z}_{\varphi\omega^i}$  et  $\mathbb{Z}_{\varphi^*\omega^i}$ , pour  $i \in \mathbb{N}$ , sont évidemment isomorphes à  $\mathbb{Z}_\varphi$  ; ils sont généralement notés  $\mathbb{Z}_\phi$  dans ce qui suit.

Tous les  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules que nous sommes amenés à considérer plus loin proviennent de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules galoisiens fonctoriellement attachés à un corps de nombres. Il existe donc des applications naturelles de transition, ainsi dans  $L/F$  la norme arithmétique  $N_{L/F}$  (ou restriction) et le morphisme d'extension  $j_{L/F}$  (ou corestriction), qui vérifient les identités :

<sup>3</sup>Cette condition n'est évidemment restrictive que pour  $\ell = 2$ .

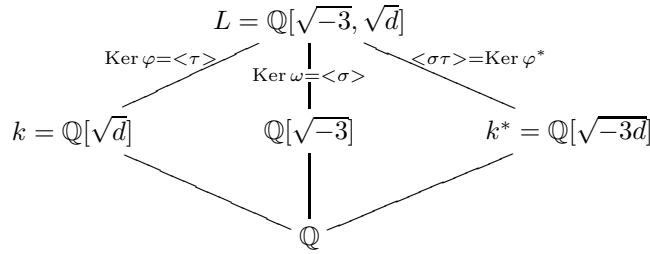
<sup>4</sup>En particulier, on a l'égalité  $\omega = 1$  si et seulement si le corps  $K$  contient  $\zeta$ .

<sup>5</sup> De façon générale, il est commode de noter  $\psi^{-1}$  le caractère  $\tau \mapsto \psi(\tau^{-1})$

$$N_{L/F} \circ j_{L/F} = [L : F] \quad \& \quad j_{L/F} \circ N_{L/F} = \nu_\Delta = \sum_{\tau \in \Delta} \tau,$$

où  $\nu_\Delta$  est la norme algébrique attachée au groupe  $\Delta$ . En particulier, l'ordre  $|\Delta| = [L : F]$  de  $\Delta$  étant par hypothèse inversible dans  $\mathbb{Z}_\ell$ , il en résulte que le module  $X_F$  associé au sous-corps  $F$  de  $L$  s'identifie canoniquement à l'image  $X_L^{e_\Delta}$  de celui attaché à  $L$  par le projecteur associé à l'idempotent  $e_\Delta = \frac{1}{|\Delta|} \nu_\Delta = \sum_{\varphi \in R_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{irr}}(\Delta)} e_\varphi$  ; propriété que nous utilisons systématiquement dans ce qui suit.

*Exemple.* Pour illustrer immédiatement tout cela, regardons plus attentivement ce qui se passe dans la situation non triviale la plus simple : celle du miroir de Scholz (cf. [Gr]). Prenons donc  $\ell = 3$ ,  $F = \mathbb{Q}$  et considérons un corps biquadratique  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}, \sqrt{d}]$  (avec  $d \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$  sans facteur carré). Le diagramme des sous-corps se présente alors comme suit :



Le groupe de Galois  $\Delta = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  est le Vierergrüppe de Klein  $V_4 = C_2 \times C_2$ . Il possède exactement quatre caractères 3-adiques irréductibles : le caractère unité 1, le caractère cyclotomique  $\omega$  (dont le noyau  $\text{Ker } \omega$  fixe précisément le sous-corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[j] = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ) et deux autres caractères de degré 1, l'un réel  $\varphi$  dont le noyau  $\text{Ker } \varphi$  fixe le sous-corps réel  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ , l'autre imaginaire  $\varphi^* = \omega\varphi = \bar{\omega}\varphi$  dont le noyau  $\text{Ker } \varphi^*$  fixe le sous-corps quadratique imaginaire  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-3d}]$ . Si donc  $\tau$  désigne la conjugaison complexe et  $\sigma$  l'unique élément non trivial de  $\Delta$  qui fixe le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[j]$ , les quatre idempotents primitifs de l'algèbre  $\mathbb{Z}_3[\Delta]$  sont respectivement :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{1}{4}(1 + \tau)(1 + \sigma), & e_\omega &= \frac{1}{4}(1 - \tau)(1 + \sigma), \\
 e_\varphi &= \frac{1}{4}(1 + \tau)(1 - \sigma), & e_{\varphi^*} &= \frac{1}{4}(1 - \tau)(1 - \sigma) ;
 \end{aligned}$$

et les idempotents normiques associés aux trois sous-corps quadratiques  $\mathbb{Q}[j]$ ,  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  et  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-3d}]$  sont ainsi :

$$\frac{1}{2}(1 + \sigma) = e_1 + e_\omega, \quad \frac{1}{2}(1 + \tau) = e_1 + e_\varphi, \quad \frac{1}{2}(1 + \sigma\tau) = e_1 + e_{\varphi^*}.$$

Les extensions biquadratiques ci-dessus sont un cas particulier d'*extensions à conjugaison complexe*. Nous entendons par là les corps de nombres totalement imaginaires  $L$  qui sont extensions quadratiques d'un sur-corps totalement réel du corps de base  $F$ . Dans le contexte galoisien que nous considérons, la conjugaison complexe  $\tau$  engendre alors un sous-groupe  $\Delta_\infty$  d'indice 2 dans  $\Delta$  (ce qui suppose donc que  $\ell$  soit *impair*) et les idempotents associés  $e_+ = \frac{1}{2}(1 + \tau)$  et  $e_- = \frac{1}{2}(1 - \tau)$  permettent d'écrire tout  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module  $M$  comme somme directe de sa composante *réelle*  $M^+ = M^{e_+}$  et de sa composante *imaginaire*  $M^- = M^{e_-}$ .

### 1.b. Rappels sur le groupe des classes logarithmiques

Nous rappelons brièvement les principaux résultats sur les groupes de classes logarithmiques que nous utilisons dans la suite (cf. [Ja6] pour les preuves).

Pour chaque corps de nombres  $F$ , notons  $\mathcal{J}_F$  le  $\ell$ -adifié du groupe des idèles de  $F$ , i.e. le produit restreint

$$\mathcal{J}_F = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$$

des compactifiés  $\ell$ -adiques  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{p}}^{\times} / F_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$  des groupes multiplicatifs des complétés de  $F$  aux places non complexes.

Pour chaque place finie  $\mathfrak{p}$  le sous-groupe  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$  de  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  formé des normes cyclotomiques (i.e. des éléments de  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  qui sont normes à chaque étage fini de la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique locale  $F_{\mathfrak{p}}^c / F_{\mathfrak{p}}$ ) est le groupe des *unités logarithmiques locales* de  $F_{\mathfrak{p}}$  et le produit

$$\tilde{\mathcal{U}}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$$

est le groupe des *unités logarithmiques idéliques*; c'est aussi le noyau des valuations logarithmiques

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}} \mid x \mapsto -\frac{\text{Log } |x|_{\mathfrak{p}}}{\deg_F \mathfrak{p}} = -\frac{\text{Log}_{Iw} N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x)}{\deg_F \mathfrak{p}}$$

respectivement définies sur les  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}_{\ell}$  obtenues en prenant le logarithme d'Iwasawa de la norme  $x$  dans l'extension locale  $F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p$  corrigé par un facteur  $\deg_F \mathfrak{p}$  choisi de sorte à assurer la surjectivité de  $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ .

Le quotient

$$\mathcal{D}\ell_F = \mathcal{J}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F$$

est, par définition, le  $\ell$ -groupe des *diviseurs logarithmiques* de  $F$ ; il s'identifie, via les valuations logarithmiques  $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ , au  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module libre

$$\mathcal{D}\ell_F = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_{\ell} \mathfrak{p}$$

construit sur les places finies de  $F$  et on note  $\widetilde{\text{div}}_F$  la surjection naturelle de  $\mathcal{J}_F$  sur  $\mathcal{D}\ell_F$ . On définit alors le *degré* d'un diviseur logarithmique  $\mathfrak{d} = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$  par la formule  $\deg_F \mathfrak{d} = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}} \deg_F \mathfrak{p}$  et l'on écrit  $\widetilde{\mathcal{D}}\ell_F = \{\mathfrak{d} \in \mathcal{D}\ell_F \mid \deg_F \mathfrak{d} = 0\}$  le sous-groupe des *diviseurs logarithmiques de degré nul*, qui contient en particulier l'image  $\widetilde{\mathcal{P}}\ell_F$  dans  $\mathcal{D}\ell_F$  du sous-groupe de  $\mathcal{J}_F$  formé des *idèles principaux*

$$\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\times}.$$

On dit que  $\widetilde{\mathcal{P}}\ell_F$  est le sous-groupe des *diviseurs logarithmiques principaux*; et le quotient (conjecturalement fini)

$$\widetilde{\mathcal{C}}\ell_F = \widetilde{\mathcal{D}}\ell_F / \widetilde{\mathcal{P}}\ell_F$$

est, par définition, le  $\ell$ -groupe des *classes logarithmiques* du corps  $F$ . Enfin le noyau  $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \tilde{\mathcal{U}}_F$  du morphisme  $\widetilde{\text{div}}_F$  de  $\mathcal{R}_F$  dans  $\widetilde{\mathcal{D}}\ell_F$  est le groupe des *unités logarithmiques globales* du corps  $F$  qui apparait dans la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_F \longrightarrow \mathcal{R}_F \xrightarrow{\widetilde{\text{div}}_F} \widetilde{\mathcal{D}}\ell_F \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}\ell_F \longrightarrow 1$$

Regardons maintenant les morphismes de transition qui conduisent à la notion, essentielle pour ce qui suit, de ramification logarithmique :

Soit donc  $N/F$  une extension arbitraire de corps de nombres. Pour chaque nombre premier  $p$ , notons  $\hat{\mathbb{Q}}_p^c$  la  $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$ , i.e. le compositum des  $\mathbb{Z}_q$ -extensions cyclotomiques de  $\mathbb{Q}_p$  pour tous les premiers  $q$ . Soit alors  $\mathfrak{p}$  un premier de  $F$  au-dessus de  $p$  puis  $\mathfrak{P}$  un premier de  $N$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$ . Les indices *de ramification logarithmique*  $\tilde{e}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}}$  et *d'inertie logarithmique*  $\tilde{f}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}}$  sont par définition les degrés relatifs

$$\tilde{e}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}} = [N_{\mathfrak{P}} : N_{\mathfrak{P}} \cap \hat{\mathbb{Q}}_p^c F_{\mathfrak{p}}] \quad \& \quad \tilde{f}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}} = [N_{\mathfrak{P}} \cap \hat{\mathbb{Q}}_p^c F_{\mathfrak{p}} : F_{\mathfrak{p}}].$$

Il suit de là que l'extension,  $N/F$  est logarithmiquement non ramifiée en la place  $\mathfrak{P}$ , c'est à dire que l'on a  $\tilde{e}(N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{P}}) = 1$ , si et seulement si le corps local  $N_{\mathfrak{P}}$  est contenu dans la  $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de  $F_{\mathfrak{P}}$  (i.e. si l'extension  $N/F$  est localement cyclotomique en  $\mathfrak{P}$ ). D'autre part, pour chaque  $q \neq p$  les indices précédents pris au sens classique ou au sens logarithmique ont la même  $q$ -partie. Ils coïncident donc pour presque tout  $p$  (de fait pour  $p \nmid [F_{\mathfrak{P}} : \mathbb{Q}_p]$ ).

Les analogues logarithmiques des morphismes de transition sont alors caractérisés comme suit : le morphisme d'extension  $\tilde{\iota}_{N/F}$  est donné par la formule :

$$\tilde{\iota}_{N/F}(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \tilde{e}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{P} ,$$

tandis que la norme logarithmique  $\tilde{N}_{N/F}$  est définie par l'identité :

$$\tilde{N}_{N/F}(\mathfrak{P}) = \tilde{f}_{N_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{p} .$$

Ces applications sont compatibles avec leurs analogues usuels entre  $\mathcal{R}_N$  and  $\mathcal{R}_F$  et prennent place de ce fait dans les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_N & \xrightarrow{\widetilde{\text{div}}_N} & \widetilde{\mathcal{D}}\ell_N \xrightarrow{\deg_N} \mathbb{Z}_{\ell} \\ \downarrow N_{N/F} & & \downarrow \tilde{N}_{N/F} \quad \parallel \\ \mathcal{R}_F & \xrightarrow{\widetilde{\text{div}}_F} & \widetilde{\mathcal{D}}\ell_F \xrightarrow{\deg_F} \mathbb{Z}_{\ell} \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_N & \xrightarrow{\widetilde{\text{div}}_N} & \widetilde{\mathcal{D}}\ell_N \xrightarrow{\deg_N} \mathbb{Z}_{\ell} \\ \uparrow \tilde{\iota}_{N/F} & & \uparrow \tilde{\iota}_{N/F} \quad \uparrow [N:F] \\ \mathcal{R}_F & \xrightarrow{\widetilde{\text{div}}_F} & \widetilde{\mathcal{D}}\ell_F \xrightarrow{\deg_F} \mathbb{Z}_{\ell} . \end{array}$$

Par passage au quotient, on obtient ainsi une description des morphismes de transition entre groupes de classes logarithmiques, ce qui permet en particulier, lorsque l'extension  $N/F$  considérée est galoisienne, d'estimer le nombre de points fixes (i.e. de classes ambiges) ou de copoints fixes (i.e. de classes centrales), soit :

$$|{}^G \widetilde{\mathcal{C}}\ell_N| = |\widetilde{\mathcal{C}}\ell_F| \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in Pl_F^{\infty}} d_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/F) \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_F^0} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/F)}{[N^c : F^c](\widetilde{\mathcal{E}}_F : \widetilde{\mathcal{E}}_F \cap N_{N/F} \mathcal{R}_N)} \kappa_{N/F}(\mathcal{D}\ell_N^{I_G} \mathcal{P}\ell_N : \widetilde{\mathcal{D}}\ell_N^{I_G} \mathcal{P}\ell_N),$$

où  $G$  est le groupe de Galois de l'extension ;  $d_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/F)$  et  $\tilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/F)$  sont respectivement le degré et l'indice de ramification logarithmique de l'extension *abélienne* locale  $N_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}$  attachée à la place  $\mathfrak{p}$  ; et  $\kappa_{L/K} = (\mathcal{N}_{L/K}^{loc} : N_{L/K} \mathcal{R}_L)$  désigne le nombre de noeuds de  $L/K$  (cf. [Ja<sub>6</sub>]), Th. 5.4). Enfin, dans le contexte galoisien défini plus haut, cette formule admet évidemment un raffinement composante par composante, qui nous sera utile plus loin (cf. [JS<sub>2</sub>], Th. 10).

### 1.c. Introduction des noyaux étales sauvages

Classiquement les  $\ell$ -noyaux étales sauvages<sup>6</sup> sont définis pour  $i \geq 1$  comme les noyaux des morphismes de localisation :

$$WK_{2i}(F) = \text{Ker}(H_{\text{ét}}^2(O_F^S, \mathbb{Z}_{\ell}(i+1)) \rightarrow \oplus_{\mathfrak{p} \in S} H_{\text{ét}}^2(F_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_{\ell}(i+1))) ;$$

ce qui, en termes de cohomologie galoisienne, s'écrit encore :

$$WK_{2i}(F) = \text{Ker}(H^2(G_F^S, \mathbb{Z}_{\ell}(i+1)) \rightarrow \oplus_{\mathfrak{p} \in S} H^2(F_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_{\ell}(i+1))),$$

si  $S$  désigne l'ensemble des places réelles ou  $\ell$ -adiques de  $F$  et  $\mathbb{Z}_{\ell}(i+1)$  le  $(i+1)$ -ième tordu à la Tate du groupe  $\mathbb{Z}_{\ell}$ . Par dualité de Poitou-Tate et montée dans la  $\ell$ -tour cyclotomique, P. Schneider (cf. [Sc]) en tire une description des  $WK_{2i}(F)$  comme groupe des copoints fixes d'un certain module d'Iwasawa tordu. En fait, cette description s'étend sans peine aux indices négatifs, ce qui permet de redéfinir comme suit les  $\ell$ -noyaux étales sauvages :

<sup>6</sup> Cette appellation est due à T. Nguyen Quang Do [Ng<sub>1</sub>].

**Définition 1.** Soit  $L$  un corps de nombres contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité,  $L^c = \cup_{n \in \mathbb{N}} L[\mu_{\ell^n}]$  sa  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique et  $\Gamma$  le groupe procyclique  $\text{Gal}(L^c/L)$ . Notons  $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$  le module de Tate construit sur les racines  $\ell$ -primaires de l'unité,  $\overline{\mathbb{T}}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}^*$  le module contagrédient, i.e. le dual de Pontrjagin de la réunion  $\mu_{\ell^\infty}$  des groupes  $\mu_{\ell^n}$ . On définit alors le  $i$ -ième  $\ell$ -noyau sauvage<sup>7</sup> de  $L$  comme le quotient des copoints fixes :

$$WK_{2i}(L) \simeq {}^\Gamma(\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c}),$$

où  $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}$  est la  $|i|$ -ième puissance tensorielle de  $\mathbb{T}_\ell$  pour  $i \geq 0$  et de  $\overline{\mathbb{T}}_\ell$  pour  $i \leq 0$ , et  $\mathcal{C}_{L^c}$  désigne le groupe de Galois  $\text{Gal}(H_{L^c}^{cd}/L^c)$  attaché à la pro- $\ell$ -extension abélienne localement triviale maximale  $H_{L^c}^{cd}$  de  $L^c$ .

Enfin, dans le contexte galoisien exposé au début de l'article, on définit le  $i$ -ième noyau sauvage  $WK_{2i}(F)$  d'un corps de nombres arbitraire  $F$  comme la 1-composante  $WK_{2i}^{e_1}(L)$  du noyau correspondant attaché au corps  $L$ .

*Remarque.* La montée dans la tour cyclotomique  $L^c/L$  ayant épuisé toute possibilité d'inertie aux places étrangères à  $\ell$ , le corps  $H_{L^c}^{cd}$  n'est autre que la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $L^c$  qui est non ramifiée partout et complètement décomposée aux places au-dessus de  $\ell$ .

En particulier, le groupe  $\mathcal{C}_{L^c}$  s'identifie à la limite projective

$$\mathcal{C}_{L^c} \simeq \varprojlim \mathcal{C}'_{L_n}$$

des  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_{L_n}$  attachés aux étages finis  $L_n$  de la tour cyclotomique  $L^c/L$ , i.e. aux quotients des  $\ell$ -groupes de classes (au sens ordinaire)  $\mathcal{C}_{L_n}$  par leurs sous-groupes respectifs engendrés par les classes de idéaux au-dessus de  $\ell$ .

Cela étant, les groupes  $WK_{2i}(F)$  admettent l'interprétation suivante :

**Proposition 2.** Soient  $F$  un corps de nombres et  $\ell$  un premier arbitraires.

- (i) Pour  $i > 0$ ,  $WK_{2i}(F)$  est fini comme  $i$ -ème noyau sauvage de la  $K$ -théorie.
- (ii) Pour  $i = 0$ ,  $WK_0(F)$  est le  $\ell$ -groupe  $\widehat{\mathcal{C}}_{\ell_F}$  des classes logarithmiques de  $F$ .
- (iii) Pour  $i = -1$ ,  $WK_{-2}(F)$  est le dual de Pontjagin du sous-groupe du radical kummérien  $\text{Rad}(L^{cd}/L^c)$  attaché à la pro- $\ell$ -extension abélienne localement triviale maximale  $L^{cd}$  de  $L^c$  qui est engendré par des éléments de  $F$ .

*Preuve.* Ces divers résultats sont essentiellement bien connus :

- (i) Pour  $i > 0$ , l'interprétation des groupes  $WK_{2i}(F)$  en termes de  $K$ -théorie supérieure fait intervenir les caractères de Chern étales définis par C. Soulé [So] et W. Dwyer & E. Friedlander [DF], puis considérés par G. Banaszak [Ba<sub>1</sub>] et T. Nguyen Quang Do [Ng<sub>2</sub>]. La finitude de  $WK_{2i}(F)$  est ainsi un résultat profond qui prend appui sur les travaux de D. Quillen [Qu] et les calculs d'A. Borel [Bo]. Le cas particulier  $i = 1$  a été résolu par J. Tate [Ta] et repose sur le théorème de finitude de Garland.
- (ii) Pour  $i = 0$ , le groupe  $WK_0(F)$  n'est autre que le quotient des genres  ${}^\Gamma \mathcal{C}_{F^c}$  du groupe  $\mathcal{C}_{F^c}$  relatif à l'extension procyclique  $F^c/F$ , i.e. le groupe de Galois  $\text{Gal}(F^{lc}/F^c)$  attaché à la sous-extension maximale  $F^{lc}$  de  $H_{F^c}^{cd}$  complètement décomposée sur  $F^c$  et abélienne sur  $F$ . Autrement dit, c'est exactement le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques défini dans [Ja<sub>6</sub>].
- (iii) Considérons enfin le dual de Pontjagin du groupe  $WK_{-2}(L)$ . Nous avons :  $\text{Hom}(WK_{-2}(L), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \text{Hom}_\Gamma(\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{C}_{L^c}, \mu_{\ell^\infty})$ . Or, puisque  $\mathcal{C}_{L^c}$  est le groupe de Galois  $\text{Gal}(L^{cd}/L^c)$  attaché à la pro- $\ell$ -extension abélienne complètement décomposée partout (i.e. localement triviale) maximale de  $L^c$ , son dual de Kummer  $\text{Hom}(\mathcal{C}_{L^c}, \mu_{\ell^\infty})$  n'est autre que le radical associé ; et il vient, comme annoncé (cf. [Ja<sub>3</sub>]) :

<sup>7</sup>T. Nguyen Quang Do [Ng<sub>3</sub>] propose la notation  $H_{2i}L$ .

$WK_{-2}(L)^* = \text{Rad}(L^{cd}/L^c)^\Gamma = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes L^\times \mid L^c[\sqrt[k]{x}] \subset L^{cd}\};$   
 puis, en prenant les points fixes par  $\Delta = \text{Gal}(L/F)$  :  
 $WK_{-2}(F)^* = \text{Rad}(L^{cd}/L^c)^{\Gamma \times \Delta} = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes F^\times \mid L^c[\sqrt[k]{x}] \subset L^{cd}\};$   
 d'où le résultat annoncé.

## 2. Enoncé de l'isomorphisme logarithmique et applications

Notre point de départ est l'isomorphisme naturel de modules galoisiens qui relie les noyaux étales sauvages au groupe des classes logarithmiques. Commençons donc par l'énoncer avec précision dans le cadre galoisien qui nous intéresse ici :

**Théorème 3.** *Soit  $\ell$  un nombre premier et  $F$  un corps de nombres dont la  $\ell$ -tour cyclotomique  $F[\zeta_{\ell^\infty}]/F$  est procyclique. Si  $L$  est une extension abélienne de  $F$  de groupe de Galois  $\Delta$  d'ordre  $d$  étranger à  $\ell$ , contenant le groupe  $\mu_{\ell^r}$  des racines  $\ell^r$ -ièmes de l'unité pour un  $r \geq 1$ , il existe pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  un isomorphisme canonique de  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules*

$$(\star) \quad \ell^r WK_{2i}(L) \simeq \mu_{\ell^r}^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$$

entre le quotient d'exposant  $\ell^r$  du noyau étale sauvage  $WK_{2i}(L)$  et le tensorisé  $i$  fois par  $\mu_{\ell^r}$  du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps  $L$ .

*Remarque.* Comme expliqué plus haut, l'isomorphisme annoncé ne fait intervenir aucun argument conjectural. En particulier, il ne présuppose vraie ni la conjecture de Gross généralisée (qui postule la finitude du groupe  $WK_0(L) = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ ), ni celle de Schneider (qui postule celle des groupes  $WK_{2i}(F)$  pour  $i < -1$ ), ni *a fortiori* celle de Leopoldt (qui n'intervient que pour  $i = -1$ )<sup>8</sup>.

En revanche, l'hypothèse faite  $F[\zeta_{2^\infty}] = F^c$  est restrictive pour  $\ell = 2$ .

*Preuve du Théorème.* C'est un simple exercice de théorie d'Iwasawa. Introduisons la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $L^c$  de  $L$ ; notons  $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(L^c/L)$ ; désignons enfin par  $\nabla_r$  l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$  engendré par  $\gamma - 1$  et  $\ell^r$ . Cela étant :

D'un côté, les résultats de Schneider (cf. [Sc]) nous donnent l'isomorphisme :

$$WK_{2i}(L) \simeq {}^\Gamma(\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c}),$$

où  $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}$  désigne la  $i$ -ème puissance tensorielle du module de Tate  $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$  construit sur les racines d'ordre  $\ell$ -primaire de l'unité.

D'un autre côté, la théorie du corps de classes nous donne directement :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \simeq {}^\Gamma \mathcal{C}_{L^c},$$

puisque  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$  n'est autre que le quotient des genres associé à  $\mathcal{C}_{L^c}$  relativement à l'extension procyclique  $L^c/L$  (cf. [Ja6]). Il vient donc :

$$\begin{aligned}
 \ell^r WK_{2i}(L) &\simeq (\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c}) / \nabla_r (\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c}) \\
 &\simeq \mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\mathcal{C}_{L^c} / \nabla_r \mathcal{C}_{L^c}) \simeq \mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \ell^r \mathcal{C}\ell_L \simeq \mu_{\ell^r}^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L,
 \end{aligned}$$

comme annoncé, puisque par hypothèse le groupe  $\Gamma$  opère trivialement sur  $\mu_{\ell^r}$ .

### 2.a. Formules de rang et surjectivité de la descente

Commençons par énoncer le Théorème 3 pour chaque composante isotypique.

**Théorème 4.** *Soit  $F$  arbitraire<sup>9</sup> et  $L$  comme plus haut. Pour chaque idempotent  $e_\phi$  de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$  et  $i \in \mathbb{Z}$ , il existe un isomorphisme de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules :*

<sup>8</sup>Les liens entre ces diverses conjectures sont détaillés en appendice.

<sup>9</sup>Sous la seule condition de procyclicité de sa 2-extension cyclotomique dans le cas  $\ell = 2$ .

$${}^{\ell^r}WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) \simeq {}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{e_{\varphi}},$$

entre la  $\varphi\bar{\omega}^i$ -composante du quotient d'exposant  $\ell^r$  du noyau sauvage  $WK_{2i}(L)$  et la  $\varphi$ -composante du quotient d'exposant  $\ell^r$  du groupe des classes logarithmiques.

En particulier, on a :  ${}^{\ell^r}WK_{2i}(F) \simeq {}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}$ .

*Preuve.* C'est la traduction directe du Théorème 3 composante par composante<sup>10</sup>.

Dans le cas particulier des corps biquadratiques  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}, \sqrt{d}]$  étudié par Scholz, le Théorème ci-dessus prend une forme particulièrement simple :

**Corollaire 5.** *Soit  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  un corps quadratique (réel ou imaginaire, mais distinct de  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ) et  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-3d}]$  son reflet dans l'involution du miroir. Alors pour chaque  $i > 0$ , les quotients d'exposant 3 des noyaux sauvages étales de  $k$  sont donnés à partir des 3-groupes de classes logarithmiques de  $k$  et  $k^*$  par :*

$${}^3WK_{2i}(k) \simeq \begin{cases} \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_k & \text{pour } i \text{ pair,} \\ \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{k^*} & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases}$$

*Remarque.* Dans le cas du corps quadratique  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ , il vient directement :

$${}^3WK_{2i}(k) \simeq \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_k = 1,$$

puisque le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[j]$  est 3-régulier donc 3-logarithmiquement principal (cf. [GJ]). Tous les  $WK_{2i}(k)$  ont donc dans ce cas une 3-partie triviale.

A l'instar de ce qui est fait dans [JS<sub>2</sub>], l'isomorphisme  $(\star)$  permet de transporter aux noyaux étales sauvages les inégalités du miroir sur les  $\ell$ -rangs des classes logarithmiques, qui ne sont en fin de compte que la transcription dans le cadre logarithmique du très classique *Spiegelungssatz* de Leopoldt :

**Proposition 6.** *Supposons  $F$  totalement réel et  $L$  à conjugaison complexe i.e. extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de  $F$ . Alors, pour chaque caractère  $\ell$ -adique irréductible imaginaire  $\varphi$  du groupe  $\Delta$ , on a les inégalités entre  $F_{\phi}$ -dimensions des composantes isotypiques :*

$$0 \leq \dim_{F_{\phi}} {}^{\ell}WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) - \dim_{F_{\phi}} {}^{\ell}WK_{2i}^{e_{\varphi^*\bar{\omega}^i}}(L) \leq [F : \mathbb{Q}].$$

*Preuve.* D'après l'isomorphisme  $(\star)$ , la différence considérée s'écrit encore :

$$\dim_{F_{\phi}} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{e_{\varphi}} - \dim_{F_{\phi}} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{e_{\varphi^*}}.$$

Le résultat annoncé résulte donc directement du Théorème 4 de [JS<sub>2</sub>].

**Corollaire 7.** *Prenons  $F = \mathbb{Q}$  et  $L = \mathbb{Q}[\zeta_{\ell}]$ . Le groupe de Galois  $\Delta$  est alors cyclique d'ordre  $\ell - 1$  et ses caractères  $\ell$ -adiques irréductibles  $\varphi$  sont de dimension 1. Pour chaque  $\varphi$  réel, on a donc l'inégalité entre  $\ell$ -rangs des noyaux sauvages :*

$$0 \leq \text{rg}_{\ell} {}^{\ell}WK_{2i}^{e_{\varphi^*\bar{\omega}^i}}(L) - \text{rg}_{\ell} {}^{\ell}WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) \leq 1.$$

**Corollaire 8.** *Prenons  $F = \mathbb{Q}$  et  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}, \sqrt{-3}]$ . Notons  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  le sous-corps quadratique réel de  $L$  et  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-3d}]$  son reflet. Il vient alors :*

$$0 \leq \text{rg}_3 {}^3WK_{4i}(k) - \text{rg}_3 {}^3WK_{4i}(k^*) = \text{rg}_3 {}^3WK_{4i+2}(k^*) - \text{rg}_3 {}^3WK_{4i+2}(k) \leq 1.$$

Notons d'autre part qu'il est possible, sous certaines conditions de déduire de l'isomorphisme  $(\star)$  des résultats plus forts sur les groupes tout entiers :

**Proposition 9.** *Conservons les notations du Théorème 4 et supposons que pour un caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi$  du groupe  $\Delta$ , la  $\varphi$ -composante du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$  soit finie, disons d'ordre  $\ell^{s_{\varphi}}$ . Alors :*

<sup>10</sup>On retrouve ainsi en particulier les résultats de périodicité obtenus par M. Kolster [Ko<sub>3</sub>].



(i) Si l'on a  $s_\varphi < r$ , la  $\varphi\bar{\omega}^i$ -composante de  $WK_{2i}(L)$  est encore finie et on a :

$$WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) \simeq \widetilde{\mathcal{C}}_L^{e_\varphi}.$$

(ii) Si l'on a  $s_\varphi \leq r$ , la même conclusion vaut encore sous réserve d'injectivité<sup>11</sup> du morphisme d'extension :  $WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) \rightarrow WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L[\zeta_{\ell^{r+1}}])$ .

*Preuve.* Identique *mutatis mutandis* à celle du Théorème 7 de [JS<sub>2</sub>].

Expliquons enfin comment l'isomorphisme  $(\star)$  permet de résoudre très simplement la question de la surjectivité du morphisme de descente (ou corestriction) dans une extension arbitraire de corps de nombres (cf. [Ka]) :

**Proposition 10.** *Soit  $F$  un corps de nombres arbitraire et  $N$  une extension de  $F$  ayant pour degré une puissance de  $\ell$  (mais non nécessairement galoisienne). Soit  $L$  abélienne sur  $F$ , de groupe  $\Delta$ , de degré relatif  $d$  étranger avec  $\ell$ , contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité, et  $LN$  le compositum de  $L$  et de  $N$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  l'application canonique de corestriction  $Tr_{N/F}$*

$$WK_{2i}(N) \rightarrow WK_{2i}(F)$$

*est surjective si et seulement si  $LN/L$  ne contient pas de sous-extension cyclique de degré  $\ell$  et isotypique<sup>12</sup> de caractère  $\omega^i$  qui soit logarithmiquement non ramifiée et disjointe de  $L^c/L$ . En particulier, lorsque l'extension  $N/F$  considérée est galoisienne, on a toujours  $Tr_{N/F}(WK_{2i}(N)) = WK_{2i}(F)$  dès qu'on a  $\omega^i \neq 1$ .*

*Preuve.* Prenant, en effet, les 1-composantes, nous obtenons immédiatement :

$$WK_{2i}(F)/Tr_{N/F}(WK_{2i}(N))WK_{2i}(F)^\ell \simeq \widetilde{\mathcal{C}}_L^{e_{\omega^i}}/\widetilde{N}_{LN/L}(\widetilde{\mathcal{C}}_{LN}^{e_{\omega^i}})\widetilde{\mathcal{C}}_L^{e_{\omega^i}\ell}.$$

Et la théorie du corps de classes (cf. [Ja<sub>7</sub>]) nous donne bien le résultat annoncé, en vertu de l'interprétation de  $\widetilde{\mathcal{C}}_L$  comme groupe de Galois  $\text{Gal}(L^c/L^c)$  attaché à la  $\ell$ -extension abélienne logarithmiquement non ramifiée maximale de  $L$ .

## 2.b. Trivialité des noyaux étales supérieurs

Une autre application essentielle de l'isomorphisme  $(\star)$  est de caractériser en termes de classes logarithmiques la trivialité des diverses composantes isotypiques des  $\ell$ -noyaux étales sauvages, puisque, dans le contexte galoisien précisé plus haut, on a évidemment l'équivalence :

$$WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) = 1 \Leftrightarrow {}^\ell WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) = 1 \Leftrightarrow {}^\ell \widetilde{\mathcal{C}}_L^{e_\varphi} = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_L^{e_\varphi} = 1.$$

En particulier, on dispose là d'un moyen d'étudier la trivialité de  $WK_{2i}(F)$  pour n'importe<sup>13</sup> quel corps de nombres  $F$ , et notamment la propagation de cette trivialité dans une  $\ell$ -extension de tels corps, en transportant par l'isomorphisme  $(\star)$  la formule des classes logarithmiques centrales (cf. [JS<sub>2</sub>]). Il vient ainsi :

**Théorème 11.** *Soit  $N/F$  une  $\ell$ -extension de corps de nombres de groupe de Galois  $G$  et  $LN/F$  l'extension obtenue par composition avec une extension abélienne  $L/F$ , de groupe  $\Delta$ , de degré  $d$  relatif étranger avec  $\ell$ , contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité. Alors, pour tout caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi \neq 1$  du groupe  $\Delta$ , on a l'équivalence :*

$$WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(LN) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) = 1 & \& \\ (\widetilde{\mathcal{E}}_{LN}^{e_\varphi} : \widetilde{\mathcal{E}}_{LN}^{e_\varphi} \cap \mathcal{N}_{LN/L}^{loc}) = \prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/F)^{<\varphi, \chi_{\mathfrak{p}}>}, \end{cases}$$

où  $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(LN/L)$  désigne l'indice de ramification logarithmique abélianisé de laplace  $\mathfrak{p}$  de  $F$  dans l'extension  $N/F$  et  $\chi_{\mathfrak{p}}$  l'induit à  $\Delta$  du caractère unité de son sous-groupe de décomposition  $\Delta_{\mathfrak{p}}$  dans  $L/F$ , tandis que  $\widetilde{\mathcal{E}}_{LN}$  est le groupe des unités logarithmiques du corps  $LN$  et  $\mathcal{N}_{LN/L}^{loc}$  le groupe des normes locales dans  $NL/L$ .

<sup>11</sup>Cette injectivité sera discutée plus loin en liaison avec l'étude des noyaux de capitulation.

<sup>12</sup>C'est à dire dont le groupe de Galois est un  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module isotypique.

<sup>13</sup>Toujours sous la seule condition de procyclicité de la 2-extension cyclotomique pour  $\ell = 2$ .

*Preuve.* Il suffit de transporter par l'isomorphisme  $(\star)$  le Théorème 10 de [JS<sub>2</sub>].

*Remarque.* Outre des simplifications techniques permettant de tuer la contribution éventuelle du groupes des noeuds relatif à l'extension  $LN/L$ , l'hypothèse  $\varphi \neq 1$  assure essentiellement la validité de la descente :

$$WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(LN) = 1 \Rightarrow WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) = 1.$$

Sans surprise, la montée tout au contraire met en jeu de façon non triviale l'arithmétique (logarithmique) de l'extension considérée.

On observera que pour  $\varphi = 1$ , en revanche, la descente peut être en défaut : c'est en particulier le cas lorsque le corps de base  $F$  n'est pas logarithmiquement principal mais possède une  $\ell$ -tour localement cyclotomique finie, i.e. une  $\ell$ -extension (finie) qui est logarithmiquement principale (cf. [JS<sub>1</sub>]).

**Scolie 12.** *Les conclusions du Théorème valent encore pour  $\varphi = 1$ , dès lors qu'une au moins des places de  $F$  se ramifie totalement (au sens logarithmique) dans l'extension  $N/F$ .*

*Preuve.* Cette hypothèse anéantit, en effet, tous les facteurs parasites (cf. [Ja<sub>6</sub>]).

**Corollaire 13.** *Supposons que l'extension  $L/F$  soit à conjugaison complexe. Alors, pour tout caractère imaginaire irréductible  $\varphi \neq \omega$ , on a l'équivalence :*

$$WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(LN) = 1 \Leftrightarrow WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L) = 1 \ \& \ \langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in \tilde{R}_{N/F},$$

où  $\tilde{R}_{N/F}$  est l'ensemble des places de  $F$  logarithmiquement ramifiées dans  $N/F$ .

Et la même équivalence vaut pour  $\varphi = \omega$ , à ceci près que l'on peut avoir dans ce cas  $\langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle \neq 0$  en une place  $\mathfrak{p}_o$  de  $\tilde{R}_{N/K}$  au plus, qui vérifie en outre :

$$(\mu_L : \mu_L \cap \mathcal{N}_{LN/L}^{\text{loc}}) = \tilde{e}_{\mathfrak{p}_o}^{ab}(N/F)^{\langle \omega, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle}.$$

*Preuve.* Il suffit d'observer que les seules unités logarithmiques imaginaires sont les racines de l'unité, qui forment un  $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ -module isotypique de caractère  $\omega$ .

**Corollaire 14.** *Supposons  $\ell$  impair,  $F$  totalement réel et prenons  $L = F[\zeta_{\ell}]$ . Soit  $N$  une  $\ell$ -extension (galoisienne) arbitraire de  $F$ . Alors :*

(i) *Pour  $i \not\equiv 1 \pmod{d}$  impair, on a  $WK_{2i}(N) = 1$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :*

(i,a)  $WK_{2i}(F) = 1$  et

(i,b) *les places  $\mathfrak{p}$  de  $F$  logarithmiquement ramifiées dans  $N/F$  ne sont pas complètement décomposées dans la sous-extension  $L^{\text{Ker } \omega^i}/F$ .*

(ii) *Pour  $i \equiv 1 \pmod{d}$ , ces deux conditions doivent être remplacées par :*

(ii,a)  $WK_{2i}(F) = 1$  et

(ii,b) *Une place au plus  $\mathfrak{p}_o$  de  $F$  est à la fois logarithmiquement ramifiée dans  $N/F$  et complètement décomposée dans  $L/F$  ; de plus on a alors :*

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}_o}^{ab}(N/F) = (\mu_L : \mu_L \cap \mathcal{N}_{LN/L}^{\text{loc}}).$$

*Preuve.* C'est immédiat d'après le corollaire 13 appliqué avec  $\varphi = \omega^i$ , la condition d'orthogonalité  $\langle \omega^i, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle = 0$  exprimant simplement la non trivialité de  $\omega^i$  sur le sous-groupe de décomposition  $\Delta_{\mathfrak{p}}$  de la place  $\mathfrak{p}$  dans l'extension  $L/F$ .

A l'opposé, la Théorie des Genres fournit également une minoration du rang :

**Proposition 15.** *Soit  $F$  un corps de nombres arbitraire et  $\ell$  un nombre premier. Alors  $F$  possède une infinité de  $\ell$ -extensions cycliques  $N$  de degré  $\ell$  dont tous les noyaux sauvages  $WK_{2i}(N)$  ont un  $\ell$ -rang arbitrairement grand.*

*Preuve.* Il suffit de transporter par  $(\star)$  les minoration du rang logarithmique données par la Théorie des Genres, dont le principe est le suivant : La suite exacte des classes logarithmiques centrales (cf. [Ja<sub>6</sub>]) appliquée dans une  $\ell$ -extension cyclique  $N/F$  de corps de nombres fait apparaître plusieurs termes dont *tous* ont une contribution explicitement bornée, à l'exclusion du terme de ramification d'ordre  $\prod_{\mathfrak{p}} \tilde{e}_{N_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}}$  qui est arbitrairement grand avec le nombre de ramifiés. Concrètement, un calcul sans surprise mené composante par composante dans l'extension composée  $NL/L$  avec  $L = F[\zeta_{\ell}]$  donne<sup>14</sup> :

$$\mathrm{rg}_{\ell} WK_{2i}(N) = \mathrm{rg}_{\ell} \widetilde{\mathcal{C}} \ell_{NL}^{e_{\omega^i}} \geq \mathrm{rg}_{\ell} {}^G \widetilde{\mathcal{C}} \ell_{NL}^{e_{\omega^i}} \geq \langle \omega^i, \sum_{\mathfrak{p} \in \tilde{R}_{N/F}} \chi_{\mathfrak{p}} - \sum_{\mathfrak{p} | \infty} \chi_{\mathfrak{p}} - 1 \rangle,$$

d'où le résultat, le caractère  $\sum_{\mathfrak{p} \in \tilde{R}_{N/F}} \chi_{\mathfrak{p}}$  pouvant être pris arbitrairement grand avec le nombre de places ramifiées (au sens ordinaire ou logarithmique).

## 2.c. Le problème de la capitulation

Venons en maintenant au noyau du morphisme d'extension déjà étudié par J. Coates, R. Greenberg, B. Kahn, T. Nguyen quang Do ou l'auteur [Ja<sub>4</sub>] dans divers contextes. Du point de vue de la Théorie d'Iwasawa, la question de la capitulation pour les noyaux étales sauvages dans une  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension se présente comme suit :

On dispose d'un module noethérien  $X$  sur l'algèbre d'Iwasawa  $\Lambda = \mathbb{Z}_{\ell}[[\gamma - 1]]$  attachée à un groupe procyclique  $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_{\ell}}$  ; on note  $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$  ; et on s'intéresse aux noyaux des morphismes de transition  $Cap_n = \mathrm{Ker}(X_n \mapsto X_m)$  pour  $m \gg n \gg 0$  induits par la multiplication par  $\omega_m/\omega_n$  entre les quotients  $X_n = X/\omega_n X$  et  $X_m = X/\omega_m X$  pour  $n$  et  $m - n$  assez grands ; ce qui revient à considérer le noyau  $Cap_n = \mathrm{Ker}(X_n \mapsto X_{\infty})$  du morphisme d'extension à valeurs dans la limite inductive  $X_{\infty}$  des  $X_n$ . Notant  $T$  le plus grand  $\Lambda$ -sous-module fini<sup>15</sup> de  $X$ , on a, par un calcul élémentaire :

$$Cap_n = \{x + \omega_n X \mid (\omega_m/\omega_n) x = 0\} \underset{m \gg n}{=} (T + \omega_n X)/\omega_n X \underset{n \gg 0}{\simeq} T,$$

où l'on voit que non seulement les groupes  $Cap_n$  sont bornés (comme l'a montré Iwasawa pour les groupes de classes) mais qu'ils sont ultimement isomorphes et que leur limite projective a une interprétation très simple. Lorsque, de plus, le groupe  $X$  est un  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module noethérien<sup>16</sup>, ce qui est la situation standard pour la limite projective des  $\ell$ -groupes de classes d'idéaux dans la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique d'un corps absolument abélien, d'après un résultat de Ferrero et Washington conjecturé pour tout corps de nombres (cf. [Wa]), on peut même dire mieux : d'après [JG], en effet, il existe alors une famille  $(\alpha_j)_{j=1, \dots, \lambda}$  d'entiers relatifs tels qu'on ait, pour tout  $n$  assez grand :

$$X_n \simeq \left( \bigoplus_{j=1}^{\lambda} \mathbb{Z}/\ell^{n+\alpha_j} \mathbb{Z} \right) \oplus Cap_n ;$$

de sorte que  $Cap_n \simeq T$  est alors un facteur direct du  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module  $X_n$ .

Enfin, dans le contexte galoisien qui nous intéresse, les groupes  $X$  que nous considérons sont naturellement des  $\Lambda[\Delta]$ -modules, ce qui permet de généraliser les résultats ci-dessus aux diverses composantes isotypiques regardées comme  $\mathbb{Z}_{\phi}[[\gamma - 1]]$ -modules, ainsi qu'il est fait dans [Ja<sub>2</sub>]. Il vient ainsi :

**Théorème 16.** *Soit  $F$  un corps de nombres arbitraire et  $L$  une extension abélienne de  $F$ , contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité, de groupe de Galois  $\Delta$ , de degré relatif  $d$  étranger avec  $\ell$ , puis  $F_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique de  $F$  et  $L_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$  celle de  $L$ . Notons  $\Lambda[\Delta] = \mathbb{Z}_{\ell}[[\gamma - 1]][\Delta]$  l'algèbre d'Iwasawa construite sur un générateur topologique  $\gamma$  du groupe procyclique  $\Gamma = \mathrm{Gal}(L_{\infty}/L) \simeq$*

<sup>14</sup>L'inégalité vaut pour  $\ell$  impair ; et à 1 près pour  $\ell = 2$ , ce qui est donc sans conséquence.

<sup>15</sup>Autrement dit, le noyau des morphismes de localisation  $X \mapsto X_{\wp}$ , où  $\wp$  décrit l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de l'anneau  $\Lambda$ .

<sup>16</sup>C'est à dire un  $\Lambda$ -module de torsion dont l'invariant  $mu$  d'Iwasawa est trivial.

$\text{Gal}(F_\infty/F)$  et  $\mathcal{T}_{L_\infty}$  le  $\Lambda[\Delta]$ -sous-module fini du groupe de Galois  $\mathcal{C}_{L_\infty} = \varprojlim \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L_n}$  de la  $\ell$ -extension abélienne complètement décomposée maximale de  $L_\infty$ . Avec ces notations :

- (i) Le  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module  $\mathcal{T}_{L_\infty}$  est la limite projective  $\varprojlim \widetilde{\text{Cap}}_{L_n}$  des groupes de capitulation logarithmique  $\widetilde{\text{Cap}}_{L_n} = \text{Ker}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L_n} \mapsto \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L_\infty})$ .
- (ii) Les noyaux de capitulation  $\text{C}WK_{2i}(L_n) = \text{Ker}(WK_{2i}(L_n) \mapsto WK_{2i}(L_\infty))$  sont donnés pour tout  $n \gg 0$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$  par l'isomorphisme galoisien :

$$\text{C}WK_{2i}(L_n) \simeq \mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes \mathcal{T}_{L_\infty} \simeq \mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes \widetilde{\text{Cap}}_{L_n}.$$

**Scolie 17.** Si en outre le groupe  $\mathcal{C}_{L_\infty}$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}_\ell$  (i.e. si l'invariant mu d'Iwasawa attaché aux  $\ell$ -groupes de classes au sens ordinaire dans la tour  $L_\infty/L$  est nul), le sous-module  $\text{C}WK_{2i}(L_n)$  est un facteur direct du  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module  $WK_{2i}(L_n)$  pour tout  $n$  assez grand ; et on a pour tous  $r \geq 1$  et  $n \gg 0$  :

$$\ell^r WK_{2i}^{e_\varphi}(L_n) \simeq (\mathbb{Z}_\phi / \ell^r \mathbb{Z}_\phi)^{\lambda_{\varphi\bar{\omega}^i}} \oplus \ell^r \mathcal{T}_{L_n}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}},$$

où  $\lambda_{\varphi\bar{\omega}^i}$  est l'invariant lambda d'Iwasawa<sup>17</sup> attaché au  $\mathbb{Z}_\phi[[\gamma - 1]]$ -module  $\mathcal{C}_{L_\infty}^{\varphi\bar{\omega}^i}$ .

*Preuve.* L'assertion (i) s'obtient en appliquant ce qui précède au  $\Lambda[\Delta]$ -module  $\mathcal{C}_{L_\infty}$  ; l'assertion (ii) en l'appliquant au module tordu  $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes \mathcal{C}_{L_\infty}$  dont le plus grand sous-module fini est évidemment  $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes \mathcal{T}_{L_\infty}$ . Enfin le Scolie s'ensuit par spécialisation aux  $\varphi\bar{\omega}^i$ -composantes, sous réserve de trivialité de la  $\varphi\bar{\omega}^i$ -partie  $\mu_{\varphi\bar{\omega}^i}$  de l'invariant mu d'Iwasawa.

*Remarque.* Comme établi dans [Ja<sub>2</sub>] (et généralisé dans [JMa]), le groupe  $\mathcal{C}_{L_\infty}$  (et plus généralement tous les  $\ell$ -groupes  $\mathcal{C}_T^S(L_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(L_n)$  de  $S$ -classes  $T$ -infinitésimales) ont même invariant<sup>18</sup> mu d'Iwasawa que le groupe  $\varprojlim \mathcal{C}\ell_{L_n}$ .

**Corollaire 18.** Avec les notations du Théorème, la  $\varphi$ -partie du noyau de capitulation sauvage est donné pour  $n \gg 0$ , à partir de la cohomologie des unités logarithmiques, par l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}_\phi$ -modules :

$$\text{C}WK_{2i}^{e_\varphi}(L_n) \simeq H^1(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{L_\infty}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}).$$

En particulier, lorsque l'extension  $L/F$  est à conjugaison complexe, les groupes étales réels  $\text{C}WK_{4i+2}(F)$  et les groupes imaginaires  $\text{C}WK_{4i}^-(L)$  sont triviaux.

*Remarque.* On retrouve là le résultat de trivialité de Kolster et Movahhedi [KM].

*Preuve.* Les unités logarithmiques imaginaires se réduisent, en effet, aux racines de l'unité, lesquelles sont cohomologiquement triviales dans la tour  $L_\infty/L$ .

**Corollaire 19.** Lorsque l'extension  $L/F$  est à conjugaison complexe, et sous les conjectures d'Iwasawa et de Greenberg dans la tour  $L_\infty/L$ , aucun des groupes  $\text{C}WK_{4i}(F_n)$  ou  $\text{C}WK_{4i+2}^-(L_n)$  ne peut être ultimement trivial sans que tous les groupes  $WK_{4i}(F_n)$  et  $WK_{4i+2}^-(L_n)$  ne le soient également.

*Preuve.* Rappelons (cf. appendice) que sous les conjectures d'Iwasawa et de Greenberg, l'invariant mu et la partie plus de l'invariant lambda associés au groupe  $\mathcal{C}_{L_\infty}$  sont nuls ; les groupes  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L_n}^{e_\varphi}$  attachés aux caractères réels sont alors d'ordre borné ; et d'après le Scolie il en va de même des groupes  $WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L_n)$  qui coïncident donc avec leurs sous-groupes de capitulation respectifs  $\text{C}WK_{2i}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}(L_n)$ .

<sup>17</sup>C'est à dire la dimension sur le corps des fractions  $\mathbb{Q}_\phi$  de  $\mathbb{Z}_\phi$  du  $\mathbb{Q}_\phi$ -espace  $\mathbb{Q}_\phi \otimes_{\mathbb{Z}_\phi} \mathcal{C}_{L_\infty}^{\varphi\bar{\omega}^i}$

<sup>18</sup>Il s'agit donc de l'invariant mu d'Iwasawa habituel.

## Appendice

### Les conjectures standard de la Théorie d'Iwasawa

La principale conjecture sur les noyaux étales sauvages s'énonce comme suit :

**Conjecture 20.** *Les groupes  $W_{2i}(F)$  sont finis pour tout corps de nombres  $F$ .*

*Remarques.* De fait la conjecture ci-dessus réunit plusieurs résultats classiques :

(i) Pour  $i > 1$ , la finitude des noyaux sauvages  $WK_{2i}(F)$ , est un résultat profond de  $K$ -théorie supérieure, comme expliqué plus haut dans la section 1.c (cf. [Ko<sub>4</sub>]).

(ii) Pour  $i = 1$ , la finitude du noyau sauvage  $WK_2(F)$ , naguère *conjecture principale*, est une conséquence d'un théorème de Garland (cf. [Ta], [Sc]).

(iii) Pour  $i = 0$ , la finitude de  $WK_0(F) = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$  n'est rien d'autre que la *conjecture de Gross généralisée* (cf. [Ja<sub>6</sub>]).

(iv) Pour  $i = -1$ , la finitude de  $WK_{-1}(F)$  est une forme équivalente mais peu connue de la *conjecture de Leopoldt* pour le corps  $F$ .

(v) Pour  $i < -1$  enfin, la finitude des noyaux  $WK_{2i}(F)$  constitue à proprement parler la *conjecture de Schneider* (cf. [Sc]).

*Preuve de (iv).* D'après [Ja<sub>7</sub>], une façon d'énoncer la *conjecture de Leopoldt* dans le corps  $F$  consiste à écrire la trivialité du *groupe des unités infinitésimales* :

$$\mathcal{E}_F^\infty = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_F \mid \varepsilon_\ell = 1 \ \forall \ell \mid \ell\},$$

qui en constitue précisément le groupe de défaut. Cela étant, puisque le groupe  $WK_{-1}(F)$  est de type fini, son dual de Pontjagin  $WK_{-1}(F)^*$  est de cotype fini et affirmer la finitude de  $WK_{-1}(F)$  revient à postuler que le sous-module divisible maximal de  $WK_{-1}(F)^*$  est trivial. L'équivalence résulte donc du lemme :

**Lemme 21.** *On a :  $(WK_{-1}(F)^*)^{\text{div}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_F^\infty$ .*

*Preuve.* Prenons  $L = F[\zeta_{2\ell}]$  comme plus haut et observons que si  $\ell^{-k} \otimes x$  est divisible dans  $WK_{-1}(F)^*$ , l'extension procyclique  $L^c[\ell^\infty\sqrt{x}]/L^c$  n'est localement triviale partout que si  $x$  est une unité en dehors de  $\ell$  et une racine de l'unité aux places divisant  $\ell$ , c'est à dire finalement que pour  $\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_F^\infty$ .

De la description de Schneider  $WK_{2i}(L) \simeq \Gamma(\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_{L^c})$ , il suit :

**Scolie 22.** *Le corps  $F$  étant donné, soit  $L = F[\zeta_{2\ell}]$  comme plus haut. Fixons un générateur topologique  $\gamma$  du groupe  $\Gamma = \text{Gal}(L^c/L) \simeq \text{Gal}(F^c/F)$ ; notons  $\Lambda[\Delta] = \oplus_{\Lambda_\phi}$  l'algèbre d'Iwasawa  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$  et  $\kappa$  le caractère de l'action de  $\Gamma$  sur les racines de l'unité. Avec ces notations, la finitude du groupe  $WK_{2i}^{e_\phi}(L)$  traduit directement le fait que  $\kappa^{-i}(\gamma)$  n'est pas racine du polynôme caractéristique  $P_{\varphi\bar{\omega}^i}(\gamma) \in \mathbb{Z}_\phi[\gamma]$  attaché au  $\Lambda_\phi$ -module  $\mathcal{C}_{L^c}^{e_{\varphi\bar{\omega}^i}}$ .*

La *conjecture de Greenberg* sur les classes des corps totalement réels est, de fait, beaucoup plus radicale pour ce qui est des composantes réelles :

**Conjecture 23.** *Soit  $F$  totalement réel et  $L = F[\zeta_{2\ell}]$  comme plus haut. On a alors :  $\deg P_{\varphi\bar{\omega}^i}(\gamma) = 0$ , i.e.  $P_{\varphi\bar{\omega}^i}(\gamma) \in \mathbb{Z}_\phi$ , dès que le caractère  $\varphi\bar{\omega}^i$  est réel.*

*Preuve.* Rappelons que la conjecture de Greenberg postule la nullité de l'invariant  $\lambda$  d'Iwasawa attaché à la limite projective  $\varprojlim \mathcal{C}\ell_{F_n}$  des  $\ell$ -groupes de classes au sens ordinaire dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension  $F_\infty/F$  d'un corps de nombres totalement réel ou, ce qui revient au même, de la partie plus de l'invariant  $\lambda$  du groupe  $\varprojlim \mathcal{C}\ell_{L_n}$  pour un corps  $L$  à conjugaison complexe. *A fortiori* donc en est-il de même lorsqu'on remplace la limite projective précédente par son quotient  $\mathcal{C}_{L_\infty}$ . D'où la conséquence énoncée, l'invariant  $\lambda$  d'un  $\Lambda$ -module n'étant autre que le degré de son polynôme caractéristique.

Enfin la conjecture d'Iwasawa<sup>19</sup> sur les invariants  $\mu$  (cf. [Iw]) s'écrit :

**Conjecture 24.** *Le groupe  $\mathcal{C}_{F_\infty}$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}_\ell$  pour tout  $F$  ; en d'autres termes, son invariant  $\mu$  est nul. En particulier, dans le contexte galoisien ci-dessus, les noyaux étales sauvages  $WK_{2i}(L_n)$  attachés aux divers étages de la tour  $L_\infty/L$  ont un  $\ell$ -rang borné indépendamment de  $n$  et de  $i$ .*

*Preuve.* D'après [Ja<sub>1</sub>], les deux groupes  $\varprojlim \mathcal{C}\ell_{L_n}$  et  $\mathcal{C}_{F_\infty}$  ont même invariant  $\mu$ .

Réunissant les conjectures d'Iwasawa et de Greenberg, nous obtenons ainsi :

**Conjecture 25.** *Soient  $F$  un corps de nombres totalement réel puis  $L$  comme plus haut abélien sur  $F$  et contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité. Alors :*

(i) *Les  $\ell$ -noyaux étales sauvages  $WK_{4i}(F_n)$  sont d'ordre borné indépendamment de  $n$  et de  $i$  dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .*

(ii) *Le même résultat vaut pour les composantes imaginaires  $WK_{4i+2}^-(L_n)$  des  $\ell$ -noyaux  $WK_{4i+2}(L_n)$  dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $L_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ .*

**Scolie 26.** *Les mêmes groupes  $WK_{4i}(F_n)$  (resp.  $WK_{4i+2}^-(L_n)$ ) sont ainsi ultimement isomorphes et coïncident avec leurs sous-groupes respectifs de capitulation.*

*Remarque.* Ce dernier résultat a d'important conséquences heuristiques sur les formules de translation du genre à la Riemann-Hurwitz dans les  $\ell$ -extensions de corps surcirculaires (i.e. de  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions cyclotomiques de corps de nombres) :

Dans un article de synthèse sur ces diverses formules [JMi], nous avons montré, en effet, que leur démonstration se ramène au cas cyclique de degré premier, pour lequel l'information est codée par le quotient de Herbrand des unités<sup>20</sup>, dont l'expérience montre que le calcul est impraticable dès qu'il est non-trivial. C'est pourquoi, depuis Kida et Iwasawa, on se restreint aux seules composantes imaginaires, pour qui le groupe des unités se réduit au sous-groupe des racines.

Dans [Ng<sub>2</sub>], T. Nguyen Quang Do propose de contourner cette difficulté en raisonnant sur les noyaux sauvages. Mais une clef du calcul est l'injectivité des morphismes d'extension  $WK_{2i}(F_n) \hookrightarrow WK_{2i}(N_\infty)$ , qui suppose bien évidemment la trivialité des noyaux de capitulation  $CWK_{2i}(F_n)$ . Pour les groupes  $WK_{4i}(F_n)$ , l'hypothèse est bien vérifiée d'après le Corollaire 17, mais dans ce cas le résultat n'apporte rien de plus que la formule de Kida ; pour les groupes  $WK_{4i+2}(F_n)$ , en revanche, elle ne peut l'être sous les conjectures précédentes que si ces groupes sont ultimement triviaux, auquel cas le calcul est sans intérêt. En fin de compte, la perspective proposée apparaît de ce fait quelque peu illusoire eu égard aux conjectures standard.

## Références

- [As] J. ASSIM, *Analogie étale de la  $p$ -tour des corps des classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 651–663.
- [Ba<sub>1</sub>] G. BANASZAK, *Algebraic  $K$ -theory of number fields and ring of integers and the Stickelberger ideal*, Ann. of Math. **135** (1992), 325–360.
- [Ba<sub>2</sub>] G. BANASZAK, *Generalization of the Moore sequence and the wild kernel for higher  $K$ -groups*, Compositio Math. **86** (1993), 281–305.
- [Ba<sub>3</sub>] G. BANASZAK, *Euler systems for higher  $K$ -theory of number fields*, J. Numb. Th. **56** (1996), 213–252.

<sup>19</sup>Pour  $F$  abélien sur  $\mathbb{Q}$ , c'est le théorème de Ferrero & Washington (cf. [Wa]).

<sup>20</sup>Concrètement pour le cas des groupes  $\mathcal{C}_{N^c}$  dans une extension  $\ell$ -extension cyclique  $N^c/F^c$  de groupe  $G \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ , par la quantité :  $q(G, \tilde{\mathcal{E}}_{N^c}) = \dim_{\mathbb{F}_\ell}(H^2(G, \tilde{\mathcal{E}}_{N^c}) - \dim_{\mathbb{F}_\ell}(H^1(G, \tilde{\mathcal{E}}_{N^c}))$ .

- [Bo] A. BOREL, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **7** (1977), 613–636.
- [Bw] J. BROWKIN, *On the  $p$ -rank of the tame kernel of algebraic number fields*, J. reine angew. Math. **432** (1992), 135–149.
- [BG] J. BROWKIN & H. GANGL, *Tame and wild kernels of quadratic imaginary number fields*, Math. Comp. **68** (1999), 290–305.
- [CK] A. CANDIOTTI & K. KRAMER, *On the 2-Sylow subgroup of the Hilbert kernel of number fields*, Acta Arithmetica **52** (1989), 49–65.
- [DF] W. DWYER & E. FRIEDLANDER, *Algebraic and étale  $K$ -theory*, Trans. Am. Math. Soc. **292** (1985), 247–280.
- [DS] F. DIAZ Y DIAZ & F. SORIANO, *Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques*, J. Numb. Theory **76** (1999), 1–15.
- [Dy] F. DIAZ Y DIAZ, J.-F. JAULENT, S. PAULI, M. POHST, & F. SORIANO-GAFIUK, *A new Algorithm for the Computation of logarithmic  $\ell$ -class groups of number fields*, Experimental Math. **14** (2005), 67–76.
- [FG] L. J. FEDERER, & B. H. GROSS, *Regulators and Iwasawa modules (with an appendix by Warren SINNOTT)*, Invent. Math. **62** (1981), no. 3, 443–457.
- [GJ] G. GRAS & J.-F. JAULENT, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [Gr] G. GRAS, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 399–499.
- [Hu<sub>1</sub>] K. HUTCHINSON, *The 2-Sylow subgroup of the wild kernel of exceptional number fields*, J. Number Th. **87** (2001), 222–238.
- [Hu<sub>2</sub>] K. HUTCHINSON, *On tame and wild kernels of special number fields*, J. Numb. Th. **107** (2004), 368–391.
- [Hu<sub>3</sub>] K. HUTCHINSON, *Étale wild kernels of exceptional number fields*, Prépublication.
- [HR] K. HUTCHINSON & D. RYAN, *Hilbert symbols as map of functors*, Acta Arith. **114** (2004), 349–368.
- [Iw] K. IWASAWA, *On  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of algebraic number fields*, Ann. of Maths **98** (1973), 246–326.
- [Ja<sub>1</sub>] J.-F. JAULENT, *Sur l’indépendance  $\ell$ -adique de nombres algébriques*, J. Number Theory **20** (1985), no. 2, 149–158.
- [Ja<sub>2</sub>] J.-F. JAULENT, *L’arithmétique des  $\ell$ -extensions (Thèse d’Etat)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985–86, (1986), vii+348 pp.
- [Ja<sub>3</sub>] J.-F. JAULENT, *La Théorie de Kummer et le  $K_2$  des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411.
- [Ja<sub>4</sub>] J.-F. JAULENT, *Noyau universel et valeurs absolues*, Astérisque **198-199-200** (1991), 187–208.
- [Ja<sub>5</sub>] J.-F. JAULENT, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), 335–348.
- [Ja<sub>6</sub>] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1995), 301–325.
- [Ja<sub>7</sub>] J.-F. JAULENT, *Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [JG] J.-F. JAULENT & M. GRANDET, *Sur la capitulation dans les  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions*, J. reine angew. Math. **362** (1985), 213–217.
- [JMa] J.-F. JAULENT & CH. MAIRE, *Sur les invariants d’Iwasawa des tours cyclotomiques*, Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.
- [JMi] J.-F. JAULENT & A. MICHEL, *Classes des corps surcirculaires et des corps de fonctions*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1989/1990, Prog. in Math. **102** (1992), 141–162.
- [JN] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, *Corps  $p$ -rationnels, corps  $p$ -réguliers et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

- [JS<sub>1</sub>] J.-F. JAULENT & F. SORIANO, *Sur les tours localement cyclotomiques*, Archiv der Math. **73** (1999), 132–140.
- [JS<sub>2</sub>] J.-F. JAULENT & F. SORIANO, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques*, Math. Z. **238** (2001), 335–354.
- [JS<sub>3</sub>] J.-F. JAULENT & F. SORIANO, *2-groupe des classes positives d'un corps de nombres et noyau sauvage de la K-théorie*, J. Number Th. **108** (2004), 187–208.
- [JS<sub>4</sub>] J.-F. JAULENT & F. SORIANO, *Sur le sous-groupe des éléments de hauteur infinie du  $K_2$  d'un corps de nombres*, Prépublication.
- [Ka] B. KAHN, *Descente galoisienne et  $K_2$  des corps de nombres*, K. Theory **7** (1993), 55–100.
- [Ke] KEUNE, *On the Structure of the  $K_2$  of the ring of the integers in a number field*, K-theory **2** (1989), 625–645.
- [Ko<sub>1</sub>] M. KOLSTER, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9–24.
- [Ko<sub>2</sub>] M. KOLSTER,  *$K_2$  of Rings of Algebraic Integers*, J. Number Theory **42** (1992), 103–122.
- [Ko<sub>3</sub>] M. KOLSTER, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's Conjecture*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1991/1992, Prog. in Math. **116**, 37–62, 1993.
- [Ko<sub>4</sub>] M. KOLSTER, *K-theory and Arithmetic*, Contemporary developments in algebraic K-theory (Lectures given at the School and Conference on Algebraic K-Theory and its Applications, Trieste, july 2002), Lecture Notes **15** (2003), 191–258.
- [KM] M. KOLSTER & A. MOVAHHEDI, *Galois co-descent for capitulation kernels of totally real number fields*, Ann. Sci. Inst. Fourier, **50** (2000), 35–65.
- [MN] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Sémin. Théor. Nombres Paris 1987/1988, Prog. in Math. **81** (1990), 155–200.
- [Mo] A. MOVAHHEDI, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990), 163–176.
- [Ng<sub>1</sub>] T. NGUYEN QUANG DO, *Analogues supérieurs du noyau sauvage*, J. Théor. Nombres Bordeaux **4** (1992), 263–271.
- [Ng<sub>2</sub>] T. NGUYEN QUANG DO,  *$K_3$  et formules de Riemann-Hurwitz*, K. Theory **7** (1993), 429–441.
- [Ng<sub>3</sub>] T. NGUYEN QUANG DO, *Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon 1998/2001 (2002), 9 p.
- [Qu] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory* (Prog. Intern. Congress Math. Vancouver, 1974) Canad. Math. Soc. (1975), 171–176.
- [Sc] P. SCHNEIDER, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181–205.
- [So] C. SOULÉ, *K-théorie des anneaux d'entiers des corps de nombres et cohomologie étale*, Inv. Math. **55** (1979), 251–295.
- [Ta] J. TATE, *Relations between  $K_2$  and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
- [Wa] L. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.

Jean-François JAULENT  
 Université Bordeaux 1  
 Institut de Mathématiques  
 351, cours de la Libération  
 F-33405 TALENCE Cedex  
 jaulent@math.u-bordeaux1.fr

Alexis MICHEL  
 Université Bordeaux 1  
 Institut de Mathématiques  
 351, cours de la Libération  
 F-33405 TALENCE Cedex  
 michel@math.u-bordeaux1.fr